El estudio del conocimiento especializado de dos profesores de Álgebra Lineal

Diana Vasco y Nuria Climent

Con el modelo Mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK), y mediante un estudio de caso, analizamos episodios de clases sobre matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales de dos profesores universitarios de álgebra lineal, con la finalidad de comprender el conocimiento que sustenta su práctica. Observamos un énfasis conceptual y procedimental con evidencias de conocimiento de los temas (KoT), relativo a procedimientos, fenomenología y aplicaciones, registros de representación, definiciones y propiedades; conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), referente a dificultades de los estudiantes; y conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), sobre ejemplos para la enseñanza.

Términos clave: Estudio de caso; Matrices; Profesor universitario; Sistemas de ecuaciones lineales

The Study of the Specialized Knowledge of two Linear Algebra Lecturers

With the Mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model, and through a case study, we analyze episodes of classes on matrices, determinants and systems of linear equations of two Linear Algebra university lecturers, in order to understand the knowledge that supports their practice. We notice a conceptual and procedural emphasis with evidences of knowledge of the topics (KoT), concerning procedures, phenomenology and applications, representations, definitions and properties; knowledge of features of learning mathematics (KFLM), referring to students' difficulties; and knowledge of mathematics teaching (KMT), on teaching examples.

Keywords: Case study; Matrix; Systems of linear equations; University lecturer

Vasco, D. y Climent N. (2018). El estudio del conocimiento especializado de dos profesores de Álgebra Lineal. *PNA, 12*(3), 129-146.

Las explicaciones del profesor aclaran la materia e influyen potencialmente en los conocimientos matemáticos que desarrollan los estudiantes (Charalambous, 2009). De las matemáticas impartidas a nivel universitario, uno de los principales cursos es el de Álgebra Lineal, que es importante por sus amplias aplicaciones. Al respecto, Ortega (2002) sostiene que el Álgebra Lineal es "una de las ramas más importantes del álgebra moderna y que más aplicaciones encuentra en otras parcelas de la ciencia como la física, la estadística, la ingeniería, el análisis numérico y las ciencias sociales" (p. 73).

Ya en el campo de la educación de profesores de matemáticas, sabemos que la investigación sobre el conocimiento de los profesores continúa siendo un tema central, y que existe una importante distinción entre saber cómo resolver problemas matemáticos y saber matemáticas de maneras que permitan su uso en la enseñanza (Ponte y Chapman, 2016). De este modo, el conocimiento profesional del profesor reconoce la necesidad de que el profesor conozca el contenido de una forma especializada en relación con la enseñanza (Ball, Thames y Phelps, 2008) y conozca, a su vez, aspectos referidos a su enseñanza y aprendizaje (Shulman, 1987).

El profesor universitario de matemáticas tiene, en general, preparación en relación con la disciplina y no ha recibido formación específica sobre esta como objeto de enseñanza y aprendizaje. Algunos autores asocian el desarrollo de conocimiento profesional a la reflexión asociada a la acción docente. Así, Bromme y Tillema (1995) mencionan que:

> *Desde un punto de vista cognitivo, el conocimiento profesional es desarrollado como un producto de acción profesional, y se establece a través del trabajo y desempeño en la profesión, no solo a través de la acumulación de conocimientos teóricos, sino a través de la integración, ajuste y reestructuración del conocimiento teórico a las demandas de situaciones prácticas y limitaciones.* (p. 262)

El objetivo de nuestro estudio es identificar y describir qué conocimiento especializado (entendido como aquel conocimiento profesional directamente determinado por la matemática como objeto de enseñanza y aprendizaje) sustenta la práctica de enseñanza de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales de dos profesores universitarios de Álgebra Lineal. Con esta finalidad nos aproximamos a dicho conocimiento analizando episodios de clases bajo el modelo Mathematics teacher's specialised knowledge (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013).

Antecedentes y marco teórico

Teniendo como base las componentes propuestas por Shulman en relación con el conocimiento del profesor (1986, 1987), como son el conocimiento pedagógico y el conocimiento del contenido (PK y SMK, por sus siglas en inglés), investigadores relacionados con la educación matemática (Ball, Thames y Phelps, 2008; Fennema y Franke, 1992; Rowland, Huckstep y Twaites, 2005) han hecho avances significativos en la última década, tanto en la conceptualización como en la caracterización del conocimiento que necesita el profesor para enseñar matemáticas (Charalambous y Pitta-Pantazi, 2016).

Asimismo, han surgido modelos relacionados con el conocimiento del profesor en asignaturas específicas como el álgebra, tal es el caso del modelo de McCrory, Floden, Ferrini-Mundy, Reckase y Senk (2012), quienes para el estudio del conocimiento para la enseñanza de profesores de álgebra de secundaria establecen dos dimensiones *knowledge of algebra for teaching* y *mathematical uses of knowledge in teaching* (o *teaching practices*). Cada una de ellas incluye categorías; en la primera, referidas a conocimiento y en la segunda, a acciones de enseñanza. En las categorías referidas a conocimiento se reconoce la necesidad de conocer el contenido comúnmente incluido en el currículo (*knowledge of school algebra*); un conocimiento avanzado, ligado quizás al establecimiento de relaciones entre contenidos (*knowledge of advanced mathematics*), y un conocimiento en el que se podrían identificar elementos de conocimiento pedagógico del contenido y conocimiento del contenido específico para la enseñanza (*teaching knowledge*).

Por su parte, Artigue, Assude, Grugeon y Lenfant (2001) distinguen tres dimensiones del conocimiento del álgebra: epistemológica, cognitiva y didáctica, que pueden considerarse como un modelo amplio para caracterizar el conocimiento del profesor. La dimensión epistemológica abarca el conocimiento del profesor sobre el contenido y estructura del álgebra, y las conexiones entre esta y otras áreas de las matemáticas. La dimensión cognitiva comprende el conocimiento del profesor en relación al aprendizaje de álgebra. Finalmente, la dimensión didáctica incluye el conocimiento del profesor sobre la enseñanza del álgebra.

El grupo SIDM[1] de la Universidad de Huelva (España) ha desarrollado un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas denominado *Mathematics teacher's specialised knowledge* (MTSK) (Carrillo et al., 2013). Este modelo se considera una propuesta teórica y herramienta metodológica que permite analizar la práctica de un profesor de matemáticas (Carrillo, Montes, Contreras y Climent, 2017); surge con base en nuestras experiencias usando el modelo *Mathematical knowledge for teaching* (MKT) (Ball et al., 2008) y ante las dificultades encontradas en la caracterización y delimitación de distintos subdominios (eg. conocimiento común del contenido y conocimiento especializado del contenido) de cara a la aplicación de estos en la investigación

[1] El SIDM es el Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática. Tiene su sede en la Universidad de Huelva, España. En el grupo participan investigadores de universidades de España, Portugal, México, Chile, Perú, Ecuador y Brasil, entre los que se encuentran las autoras de este estudio.

sobre el conocimiento de profesores (Flores-Medrano, Escudero-Ávila y Carrillo, 2013).

De ahí nuestra apuesta por utilizar el MTSK, ya que a diferencia del MKT contempla la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas en su conjunto, es decir, consideramos como conocimiento especializado del profesor de matemáticas el conjunto de los subdominios del modelo. Además, el MTSK es considerado un marco útil para pensar sobre el conocimiento matemático especializado de un profesor, tomando en cuenta que es un conocimiento bastante diferente del conocimiento matemático necesario y utilizado por un ciudadano común, un profesional de otro campo o incluso en investigación matemática (Kilpatrick y Spangler, 2016).

Por otra parte, las categorías de análisis desarrolladas en el MTSK (que a continuación describiremos) nos permiten realizar un análisis más pormenorizado del conocimiento de los profesores de nuestro estudio que con los marcos antes descritos para el estudio del conocimiento del profesor de álgebra. El MTSK propone los dominios conocimiento matemático, conocimiento didáctico del contenido y las creencias del profesor sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, vistas estas últimas como elementos que permean el conocimiento. A continuación describimos los dominios, subdominios y categorías que componen el MTSK, siendo a través de este modelo que analizamos la práctica de aula de los profesores participantes en esta investigación.

El dominio del conocimiento matemático abarca el conocimiento sobre el universo de las matemáticas, los conceptos y procedimientos, la estructuración de las ideas, las conexiones entre los conceptos, la razón y el origen de los procedimientos, así como los medios de prueba y cualquier forma de proceder en matemáticas, considerando además, conocimiento del lenguaje matemático y su precisión (Carrillo et al., 2013). Incluye los subdominios conocimiento de los temas, conocimiento de la estructura de la matemática, y conocimiento de la práctica matemática, que detallamos en las siguientes líneas.

El conocimiento de los temas se define como un conocimiento profundo y fundamentado, propio de los profesores de matemáticas y de su labor de enseñar. Se compone este subdominio de cuatro categorías: procedimientos, que comprende el conocimiento del profesor sobre algoritmos convencionales y alternativos (¿cómo se hace?), las condiciones suficientes y necesarias para proceder (¿cuándo se puede hacer?), fundamentos de los algoritmos (¿por qué se hace así?), y las características que tendrá el objeto matemático resultante asociadas a un tema (características del resultado); fenomenología y aplicaciones, entendida como el conocimiento de fenómenos o situaciones atribuibles a los significados de un tema matemático, y de los usos y aplicaciones de dicho tema; definiciones, propiedades y sus fundamentos, que se refiere al conocimiento para describir o caracterizar un concepto (incluyendo ejemplos e imágenes asociados), las propiedades de un objeto matemático o aquellas necesarias para llevar a cabo un proceso, así como las bases, cimientos o exhaustividad del empleo de una propiedad, ligado al tema a estudiar; y registros de representación, es el conocimiento sobre las diferentes formas en que un tema puede ser representado, que incluye la notación y el lenguaje matemático asociado a dichas representaciones.

El conocimiento de la estructura de la matemática comprende el conocimiento de conexiones de contenidos matemáticos con otros contenidos; cómo se interconectan internamente las matemáticas. Se distinguen las categorías: conexiones de complejización, definida como el conocimiento para relacionar los contenidos enseñados con contenidos posteriores; conexiones de simplificación, es el conocimiento del profesor para relacionar los contenidos enseñados con contenidos anteriores; conexiones transversales, referidas a ideas matemáticas subyacentes a distintos contenidos matemáticos; y conexiones auxiliares, consideradas cuando un contenido o tema diferente al que se está tratando, sirve como herramienta en el desarrollo de algún aspecto del contenido tratado.

El conocimiento de la práctica matemática contempla el conocimiento de las formas de proceder características del trabajo matemático. Incluye la jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos, formas de validación y demostración, papel de los símbolos y uso del lenguaje formal, procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producir matemáticas, prácticas particulares del quehacer matemático (por ejemplo, la modelización), y condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones.

El dominio del conocimiento didáctico del contenido está relacionado con el conocimiento del profesor sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se enfatiza la consideración de conocimientos en donde el contenido matemático condicione la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, excluyendo así los conocimientos pedagógicos generales en contextos de actividades matemáticas (Escudero-Ávila et al., 2015). Los subdominios que comprende son conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas, y conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas.

El conocimiento de la enseñanza de las matemáticas es un subdominio que considera el conocimiento específico sobre cómo enseñar contenidos matemáticos, donde se incluyen las categorías: teorías de enseñanza específicas de la educación matemática; recursos materiales y virtuales, es decir, el conocimiento de, por ejemplo, libros de texto, software, pizarras convencionales y electrónicas, como herramientas para enseñar matemáticas; y estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, que implica el conocimiento de su potencialidad, de acuerdo al tema tratado.

El conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas hace referencia al conocimiento del profesor sobre cómo se aprende un contenido matemático. Las categorías de este subdominio son: teorías de aprendizaje, que incluye el conocimiento de elaboraciones teóricas sobre la construcción del conocimiento matemático por parte de los estudiantes; fortalezas y dificultades, aquellas que podría tener el alumno con relación a un cierto tema matemático; formas de interacción con un contenido matemático, relacionada con el conocimiento del profesor sobre estrategias habituales y no habituales de los estudiantes; e intereses y expectativas, de los estudiantes con relación a un contenido matemático.

El conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas contempla aspectos del conocimiento del profesor sobre lo que es esperable que el alumno aprenda en un nivel determinado, derivados de revistas científicas, grupos de investigación y asociaciones profesionales, así como los contenidos propuestos en las normativas curriculares. Sus categorías son: expectativas de aprendizaje, conocimiento del profesor de lo esperable de acuerdo al grado escolar en que imparte sus clases; nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado; relacionado con un tema matemático en un determinado momento escolar; y secuenciación con temas anteriores y posteriores, ya sea en el mismo curso escolar, en anteriores o en posteriores.

METODOLOGÍA

Esta investigación, de tipo cualitativa e interpretativa fue desarrollada bajo un diseño de estudio de caso (Yin, 2003) instrumental (Stake, 2008), por cuanto procuramos una mayor comprensión del conocimiento especializado sobre un contenido matemático a través de la observación de la práctica y entrevistas de dos profesores (casos) que imparten un módulo de Álgebra Lineal en una carrera de Ingeniería en una universidad de Ecuador, y a los que en adelante llamaremos Jordy y Carlos.

Ambos profesores cuentan con experiencia en la enseñanza de matemáticas; Jordy es licenciado en Ciencias de la Educación, con 22 años de experiencia en la enseñanza de matemáticas en secundaria y 9 años en nivel universitario; mientras que Carlos es geólogo y tiene 17 años de experiencia en la enseñanza de matemáticas en la universidad. En cuanto a su experiencia en la enseñanza de álgebra lineal, es de 4 años para el primer profesor y de 3 años para el segundo, respectivamente.

Los profesores fueron elegidos sobre la base de su predisposición para colaborar en esta investigación, y debido a que forman parte de la población de profesores donde la primera autora de este estudio se desempeña como docente. Además, porque se pretende intervenir a posteriori con una propuesta de implementación de actividades didácticas elaboradas con la participación del grupo de profesores de matemáticas de la carrera, para lo cual creemos necesario indagar en primera instancia sobre el conocimiento del contenido y didáctico del contenido (dominios del conocimiento matemático especializado) de los profesores. El programa de estudios de la asignatura está previamente establecido y el módulo de Álgebra Lineal tiene una duración de 16 semanas con un promedio de 20 estudiantes por curso, siendo el tema de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales el que se eligió observar para este estudio, ya que constituye la base de las temáticas que se abordan en el desarrollo del módulo de Álgebra Lineal.

La recopilación de los datos se realizó durante dos períodos lectivos consecutivos: desde noviembre de 2011 hasta enero de 2012 (año 1) y desde noviembre de 2012 hasta enero de 2013 (año 2), a través de grabaciones en vídeo (observaciones de aula no participantes) durante el desarrollo de las sesiones de clases referentes a matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales. La observación de las clases durante dos períodos lectivos obedece a la posibilidad de extraer la mayor información posible para profundizar en el conocimiento especializado de los profesores, ya que estos datos forman parte de una investigación más amplia (Vasco, 2015; Vasco, Climent, Escudero-Ávila y Flores-Medrano, 2015; Vasco, Climent, Escudero-Ávila, Montes y Ribeiro, 2016) en la que estudiamos el conocimiento del profesor y la relación con sus concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Cada sesión de clases tuvo una duración aproximada de hora y media. En los dos períodos lectivos (años 1 y 2) se realizaron videograbaciones de un total de trece sesiones de clases en el caso de Jordy, y siete sesiones en el caso de Carlos. En este estudio hemos analizado la tercera sesión de clases de Jordy correspondiente al año 1 y la tercera sesión de clases de Carlos correspondiente al año 2. Además, se hicieron entrevistas semiestructuradas a estos profesores.

El análisis de los datos se realizó atendiendo a un análisis de contenido (Bardin, 1986), buscando evidencias en la acción y declaraciones (extrayendo unidades de información[2]) de los profesores que aludieran a los subdominios y categorías del MTSK. Las entrevistas semiestructuradas fueron realizadas posterior al análisis de las grabaciones en vídeo; el guión estuvo conformado por preguntas abiertas, a través de las cuales se pretendía recabar información adicional a la obtenida mediante las observaciones, que nos permitiera profundizar en la caracterización y comprensión del conocimiento de los dos profesores, y a su vez, validar algunas de las interpretaciones hechas por el investigador en el análisis de conocimiento. El guión de las entrevistas fue realizado inicialmente por uno de los investigadores, que había analizado las

[2] La denominación de unidad de información la adaptamos de la investigación de Carrillo (1998) y, en esta investigación es una parte de la transcripción de las sesiones de clases y/o respuestas de los profesores obtenidas en las entrevistas, que tiene significado en sí mismo y, que puede estar asociada a uno o varios indicadores de las categorías del instrumento de análisis.

videograbaciones, y validado después con el otro coinvestigador (con el que se contrastó también el análisis de las video grabaciones).

El objetivo de nuestro estudio es identificar y describir el conocimiento que sustenta la enseñanza de dos profesores de álgebra lineal, en el nivel y contexto en que ellos se sitúan, es decir, dar respuesta a la pregunta de investigación ¿Qué conocimiento especializado se pone en juego en la práctica de dos profesores que imparten el tema de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales en el nivel universitario?

RESULTADOS

A continuación presentamos episodios[3] de clases y extractos de entrevistas semiestructuradas de Jordy y Carlos, a través de los cuales explicamos el MTSK evidenciado por los dos profesores de álgebra lineal. En un estudio más amplio (Vasco, 2015) analizamos todas las sesiones de clase videograbadas en los dos cursos escolares mencionados. Esto nos permitió extraer un mapa del conocimiento que sustenta la práctica de ambos profesores en el tema estudiado (matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales) y vislumbrar cómo intervenía su conocimiento como herramienta en su práctica. En ambos profesores se observan regularidades en cuanto al conocimiento que ponen en juego en las sesiones, evidenciando determinadas categorías de MTSK. Los dos episodios que hemos elegido para este artículo son representativos de las categorías que se evidencian en cada caso, relacionadas con el modo de abordar cada profesor la enseñanza del tema.

El primer episodio analizado corresponde a Jordy cuando explica las matrices escalonadas, y el segundo episodio analizado es de Carlos, cuando explica la resolución de sistemas de ecuaciones lineales calculando el determinante y la matriz inversa. De acuerdo a los subdominios del MTSK, en estos episodios encontramos evidencias de conocimiento de los temas (KoT), de la enseñanza de las matemáticas (KMT) y de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM). A continuación, explicamos el conocimiento especializado observado en cada uno de los profesores participantes en este estudio.

Conocimiento especializado de Jordy

La sesión de clases a la cual pertenece el episodio analizado es la tercera (año 1 de observaciones de clases) en lo que respecta al desarrollo del tema de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales. En las dos sesiones previas, Jordy trabajó definiciones, operaciones con matrices y álgebra de matrices. Esta tercera sesión de clases fue dividida por el profesor en dos partes: en la primera parte, el profesor aborda el cálculo de la inversa de una matriz a través de

[3] En este estudio, un episodio se entiende como un fragmento de la clase en torno a un tema.

$A \cdot A^{-1} = I$ y en la segunda parte, introduce la forma escalonada de una matriz. Hemos analizado un episodio correspondiente a la segunda parte de la referida sesión de clases, cuyo objetivo es manejar operaciones elementales entre filas para escalonar una matriz. En el episodio que analizamos, Jordy (J) aborda el contenido de matrices escalonadas escribiendo tres matrices diferentes en la pizarra, a través de las cuales pretende hacer notar a los estudiantes (E) ciertas características importantes sobre el tema, y en lo posterior introducir las cuatro operaciones elementales entre filas que pueden ser empleadas para escalonar una matriz.

J: Ahora quiero que miren acá a la pizarra $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ¿Qué pasa en la primera matriz, qué le ven de especial? Primero no son cuadradas, ¿qué tienen de especial?

E: Varios ceros

J: ¿Qué pasa con los ceros?

E: Van aumentando

J: Los ceros van aumentando a medida que usted va descendiendo en las filas. Fíjese que no interesa si por acá hay un cero, la cosa es que haya ceros antes de un elemento que sea diferente de cero en esa fila. Este tipo de matrices se llaman escalonadas, va como una escalera, y a medida que va descendiendo aumentan los ceros hasta encontrarse con un número diferente de cero o hasta tener todas las filas ceros. A estos elementos que son los primeros elementos en cada fila diferentes de cero se les conoce como elementos distinguidos de fila ¿Cuáles son los de la matriz B?

E: 1 y -3

J: En C, ¿cuáles son los elementos distinguidos de fila?

E: El 1 y el 2

J: Solamente habrá un elemento distinguido por fila, no importa si después hay ceros, ese sigue siendo el elemento distinguido, es el primer elemento diferente de cero

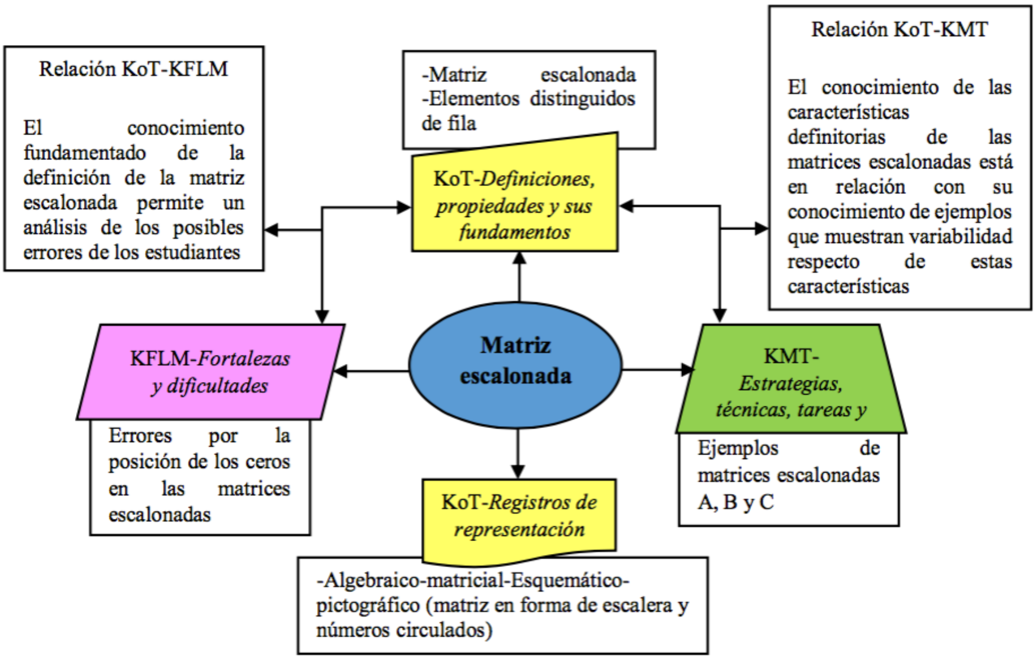
En la unidad de información seleccionada se evidencia el conocimiento de Jordy sobre definiciones de matriz escalonada y elementos distinguidos de fila (KoT, relativo a la categoría definiciones, propiedades y sus fundamentos). El profesor aborda dichas definiciones apoyado en tres ejemplos y haciendo preguntas a los estudiantes para hacerles notar características relevantes de los objetos matemáticos correspondientes. El uso de estos ejemplos, muestra, además, su KMT, relacionado con la categoría estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, considerando que los emplea en sus exposiciones con la finalidad de barrer diversas posibilidades de la situación, procurando que los estudiantes se fijen en la disposición de los ceros de las matrices escalonadas, cómo van aumentando en cada fila de las mismas y cuáles serían los elementos distinguidos de fila. En este sentido, y con la finalidad de complementar la información que nos permitiera profundizar en el conocimiento sobre ejemplos del profesor, en una entrevista le preguntamos específicamente su intención al escribir estos tres ejemplos A, B y C de matrices escalonadas, siendo su respuesta la siguiente:

J: Las puse con la intención de que los estudiantes se den cuenta de que hay diferentes clases de matrices escalonadas y qué es lo fundamental de una matriz escalonada, cuándo es y cuándo no, porque pueden cometer errores y pensar que es una matriz escalonada cuando no lo es. Si te das cuenta la última no tiene elementos diferentes de cero en la primera columna, y la segunda no tiene elementos diferentes de cero en la tercera fila, pero ambas son escalonadas. Incluso no es cuestión de que vayan seguidos los números, sino que puede haber una diferencia de varios números en el escalonamiento de una matriz.

Jordy justifica la intencionalidad de mostrar estos tres ejemplos de matrices escalonadas, y procura que los estudiantes se fijen en las características de las mismas, lo que les permite construir una definición de matriz escalonada. Por tanto, se evidencia cómo su conocimiento de estrategias, técnicas, tareas y ejemplos —KMT— está relacionado con su conocimiento de definiciones, propiedades y sus fundamentos de matriz escalonada —KoT— en el sentido de cuáles son sus propiedades definitorias (va como una escalera, y a medida que va descendiendo aumentan los ceros hasta encontrarse con un número diferente de cero o hasta tener todas las filas ceros) y cuáles son accesorias (solamente habrá un elemento distinguido por fila, no importa si después hay ceros, ese sigue siendo el elemento distinguido, es el primer elemento diferente de cero). De este modo, su análisis matemático del concepto de matriz escalonada, de su definición y sus imágenes de esta le permiten elegir ejemplos que recojan la variabilidad que el profesor considera necesaria para la enseñanza de este contenido.

Asimismo, cuando el profesor advierte a los estudiantes que para que sean matrices escalonadas interesa que haya ceros en las filas antes de cada elemento distinguido de fila, indistintamente de los ceros que existan después de dichos elementos, evidenciamos su KFLM, relativo a la categoría fortalezas y dificultades; específicamente su conocimiento sobre errores, ya que hace esta advertencia a los estudiantes porque ellos podrían no fijarse en los elementos distinguidos de fila y pensar que los ceros podrían estar indistintamente antes o después de estos para que sea una matriz escalonada, tal y como manifiesta en la entrevista. Pensamos aquí que el KoT del profesor estaría relacionado con su KFLM, ya que un conocimiento profundo del contenido matemático le permite hacer un análisis detallado de posibles errores que pueden cometer los estudiantes.

Por otro lado, referimos el conocimiento del profesor sobre distintas formas de representar el contenido matemático (KoT, referido a la categoría registros de representación). En concreto es evidente el uso de un registro algebraico matricial (Ramírez, Romero y Oktaç, 2013) en la representación de cada matriz escalonada, y un registro esquemático pictográfico (D'Amore, 2004), por los elementos aclaratorios que añade a las matrices, como los segmentos con los cuales hace notar a los estudiantes que este tipo de matrices tienen forma de escalera (en cuanto a la disposición de los ceros), y los números circulados con los que destaca los elementos distinguidos de fila. En la figura 1 mostramos el conocimiento evidenciado en el análisis que corresponde a la práctica de aula y entrevista de Jordy (J).



Nota. KoT=Conocimiento de los temas.

Figura 1. Análisis del conocimiento especializado de Jordy

Conocimiento especializado de Carlos

El episodio que analizamos a continuación pertenece a la tercera sesión de clases (año 2 de observaciones) sobre matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales de este profesor. En las sesiones previas, Carlos trabajó definiciones, operaciones con matrices, regla de Sarrus, método del menor y cofactores, regla de Cramer, matriz inversa y matriz escalonada. El objetivo que se persigue en el episodio analizado es resolver sistemas de ecuaciones lineales aplicando algunos de los contenidos trabajados en las sesiones de clases anteriores. Por tanto, Carlos (C) aborda la resolución de sistemas de ecuaciones lineales a través de un problema donde el estudiante (E) tendrá que plantear el sistema y resolverlo aplicando el producto de matrices y el cálculo de la matriz inversa por la fórmula: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}Adj(A)$, que a su vez implica calcular el determinante, la matriz adjunta y el producto de una escalar por una matriz.

C: Vamos a resolver ejercicios de aplicación de las matrices, y utilizaremos la matriz inversa para encontrar los resultados. Tenemos el problema: En una fábrica de telas, la primera máquina produce telas de \$50 cada metro y gasta \$60 por hora de producción, mientras que la segunda produce telas de \$60 el metro y gasta \$80 por hora de producción. Si el tiempo de trabajo y la cantidad de telas deben ser iguales cada día ¿Cuántas horas diarias y cuántos metros de tela deben producir para que la ganancia diaria sea de \$100 con la primera máquina y de \$80 con la segunda? Podemos darnos cuenta en este problema de que lo que queremos es conocer cuántas horas diarias deben trabajar dos máquinas y cuántos metros de tela deben producir para que la ganancia sea de \$100 en la primera y de \$80 en la segunda. Identificamos las incógnitas, podemos considerar n para el número de metros de tela y h para las horas. Si estos datos los colocamos en una matriz ¿De qué orden será?

E: Dos.

C: Se nos va a convertir en una matriz de orden 2, solamente tenemos dos ecuaciones. Al hacer el planteamiento le damos valores positivos a lo que produce ingreso, y a lo que produce egreso [le damos] valores negativos: $50n - 60h = 100$; $60n - 80h = 80$. Vamos a extraer los primeros datos y los colocaremos en una matriz que denominaremos $C = \begin{bmatrix} 50 & -60 \\ 60 & -80 \end{bmatrix}$, los multiplicamos por las incógnitas $S = \begin{bmatrix} n \\ h \end{bmatrix}$ y eso es igual a la ganancia $G = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \end{bmatrix}$. Ya en una ocasión yo les decía que con las matrices, las letras que se utilizan generalmente son A, B, C, etc., pero cuando ya estamos resolviendo un problema utilizamos algo representativo de lo que queremos hallar. Por ejemplo, podemos utilizar la C como costos, la S de solución y la G de ganancia en estas matrices. Entonces si se fijan $C\ x\ S\ =\ G$, y al despejar S, ¿qué tenemos?

E:
$$S = G/C$$

C: Al representar como un producto ¿Qué me queda?

E: $S = C^{-1}xG$

C: ¿Y qué es la C^{-1}?

E: La inversa.

C: Necesitamos la inversa de C, ¿qué debemos hacer primero?

E: Hallar la adjunta y el determinante.

C: Pueden aplicar el método que consideren conveniente. En la adjunta de C les recuerdo que la diagonal mayor se cambia de ubicación y la diagonal menor sólo se cambia de signo $Adj\ C = \begin{bmatrix} -80 & 60 \\ -60 & 50 \end{bmatrix}$. No se olvide que para saber si existe o no matriz inversa. ¿Cómo debe ser el determinante?

E: Diferente de 0.

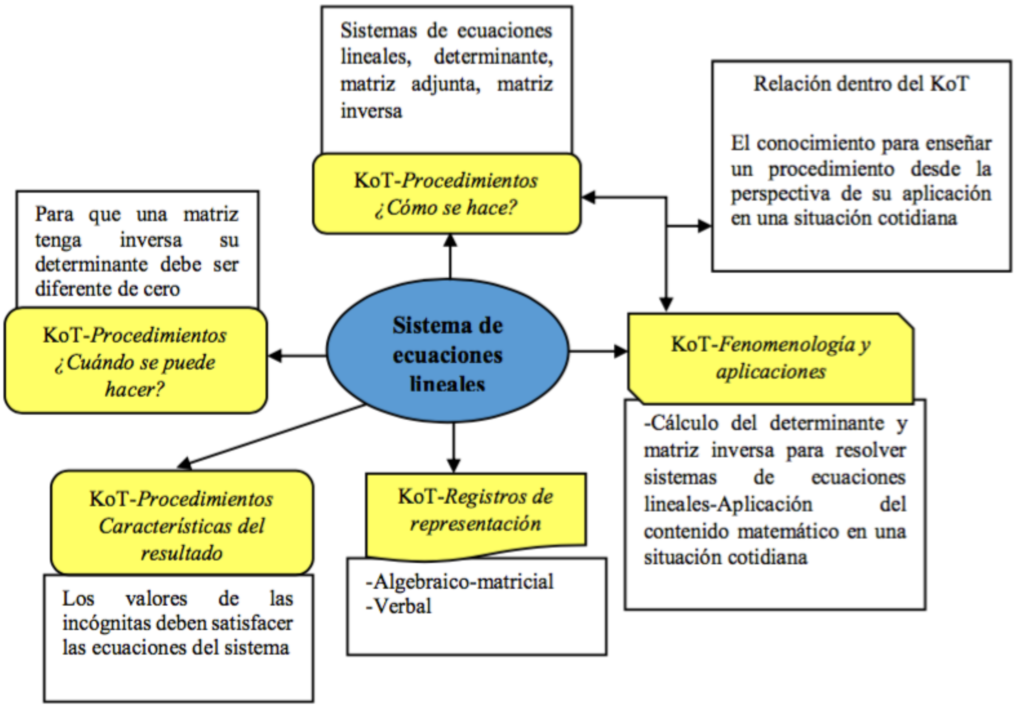
C: Aquí el determinante nos da -400. Procedemos a hallar la matriz inversa dividiendo la adjunta para el determinante $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & -3/20 \\ 3/20 & -1/8 \end{bmatrix}$. Como hemos hallado la inversa, al desarrollar el producto tenemos $S = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$, donde 8 es el número de metros de tela y 5 las horas diarias que necesitamos. Pueden hacer la comprobación, en la primera ecuación nos tiene que dar 100 y en la segunda 80.

Carlos plantea el sistema de ecuaciones ligado a la resolución de un problema que pudiera representar una situación real. Este hecho muestra que el profesor conoce situaciones en las que se aplica el conocimiento matemático en cuestión (la resolución de sistemas de ecuaciones lineales) (Conocimiento de los Temas, KoT, relativo a la categoría fenomenología y aplicaciones). El profesor, como declara en una entrevista posterior a la observación de aula, otorga mucha importancia al planteamiento de situaciones en las que se aprecie la aplicabilidad de lo que se estudia, por la motivación que supone para los estudiantes:

C: Que los alumnos se den cuenta de que tienen una aplicación en la vida real, que muchos creen que es aprender por aprender, pero que realmente no les sirve para nada. Cuando ya se les demuestra que sí tienen aplicación en la vida diaria, ellos ponen más interés.

Considerando la resolución del sistema de ecuaciones derivado del problema, Carlos muestra conocer un procedimiento para la resolución de sistemas de ecuaciones. En concreto evidencia KoT referido a las categorías: ¿cómo se hace? —al resolver por la fórmula $\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}|}\mathrm{Adj}(\mathrm{A})$—; características del resultado, ya que en la comprobación, si los valores encontrados de las incógnitas son correctos, deben satisfacer las ecuaciones del sistema; y ¿cuándo se puede hacer?, al indicar que para que una matriz tenga inversa su determinante debe ser diferente de cero.

Al traducir el problema al registro algebraico y trabajar en éste, muestra KoT referido a la categoría registros de representación. Evidencia conocimiento del registro algebraico-matricial (Ramírez et al., 2013) al referirse al planteamiento del sistema de ecuaciones lineales a partir de los datos, y representarlo luego como una matriz; y registro verbal (Castro y Castro, 1997) al emitir el enunciado del problema y hablar de la notación matemática relacionada con la denominación de las incógnitas y las matrices en el problema planteado. En la figura 2 mostramos el conocimiento evidenciado en el análisis que corresponde a la práctica de aula y entrevista de Carlos.



Nota. KoT=Conocimiento de los temas; KFLM=referente a dificultades de los estudiantes; KMT=conocimiento de la enseñanza de las matemáticas.

Figura 2. Análisis del conocimiento especializado de Carlos

Conclusiones

Desgranar la práctica de dos profesores de álgebra lineal desde el punto de vista del conocimiento que se evidencia nos permite diferenciar el quehacer de ambos desde una perspectiva ligada a recursos personales (el conocimiento del profesor como recurso para la enseñanza, Schoenfeld, 2010).

Jordy muestra un KoT que le permite analizar con detalle el objeto matemático (en este caso, el concepto de matriz escalonada) y ligar dicho análisis a la reflexión sobre posibles dificultades de los estudiantes (mostrando evidencias de KFLM, referido a fortalezas y dificultades) y selección de ejemplos que muestren variabilidad respecto de sus características accesorias (KMT, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos). El criterio de variabilidad presente en su conocimiento de ejemplos para la enseñanza corresponde a la modificación de ejemplos sin que se altere su sentido general (Figueiredo, Contreras y Blanco, 2009; Figueiredo y Contreras, 2013), y que además, promueven la generalización, es decir, que se realcen los aspectos que se desea ilustrar, indicando a su vez aquellos aspectos arbitrarios y modificables (Zaslavsky, 2010).

Carlos, por su parte, evidencia conocimiento de un procedimiento referido a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (KoT, procedimientos-cómo se hace, cuándo se puede hacer y características del resultado). Este conocimiento del procedimiento aparece enmarcado en su conocimiento de situaciones que muestran la aplicabilidad a posibles situaciones reales de los sistemas de ecuaciones lineales. Este último conocimiento referido, relativo a KoT (fenomenología y aplicaciones), sustenta su estrategia de enseñanza, el uso de problemas que hacen referencia a situaciones reales para que los alumnos se ejerciten en el manejo del contenido matemático. Sus creencias sobre el efecto motivador de tales situaciones refuerzan el uso de esta estrategia.

Ambos profesores muestran conocimiento de registros de representación de los contenidos (KoT, registros de representación). Además del registro algebraico, usado por ambos, Carlos muestra conocimiento del registro verbal (ligado a las situaciones problemáticas con las que presenta el contenido) y Jordy de registro pictórico (que usa para enfatizar aspectos que pudieran ser problemáticos para los estudiantes).

Obsérvese que nuestro objetivo no es valorar la práctica de ambos profesores, sino comprender el conocimiento que la sustenta. Desde esta perspectiva puede apreciarse cómo el análisis detallado de dicho conocimiento permite una comprensión de la enseñanza diferente de la que aporta el análisis con el foco en acciones de enseñanza en sí. El detalle con que podemos desgranar el conocimiento del profesor es a nuestro parecer el potencial del MTSK para analizar la práctica del profesor de matemáticas, frente a otros modelos de estudio del conocimiento del profesor. Este desglose detallado de su conocimiento es útil en dos sentidos. Por un lado, para comprender mejor cómo interviene el conocimiento del profesor como herramienta en su práctica. Por otro, para diseñar procesos formativos. Tomando este conocimiento como punto de partida, podríamos intervenir en procesos de desarrollo profesional centrados en tópicos de álgebra lineal, con estos u otros profesores (usando, por ejemplo, situaciones de enseñanza inspiradas en las lecciones observadas para cuestionarnos sobre posibles dificultades de los estudiantes —ligado al KFLM que muestra Jordy—, ejemplos para enseñar el contenido —KMT de Jordy—, o posibles aplicaciones del contenido —KoT de Carlos. Además, el análisis de más profesores de álgebra lineal a nivel universitario, junto con la reflexión teórica, nos puede permitir sistematizar qué contenidos necesita dicho profesor, de cara a estructurar procesos de formación.

Para nuestro análisis hemos seleccionado unidades de información que muestran situaciones características de la práctica de ambos profesores y del conocimiento que se evidencia en estas (como hemos indicado anteriormente). En general en la práctica de Jordy se observa un énfasis conceptual, que parece coherente con su KoT, su KFLM (centrado en dificultades de los estudiantes) y su KMT (centrado en ejemplos para la enseñanza). En el caso de Carlos, hemos encontrado evidencias en su mayor parte de KoT relativo a procedimientos y a fenomenología y aplicaciones del contenido. Su enseñanza de matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales tiene un énfasis sobre todo procedimental y ligado a la resolución de problemas relacionados con situaciones reales. Hemos de decir que no hemos indagado sobre el conocimiento de los profesores en situaciones ajenas a su práctica. Esto es, no le hemos preguntado a Jordy, por ejemplo, por posibles situaciones reales en las que se aplique el contenido y qué importancia les otorga en la enseñanza. Con esto no podemos afirmar que haya una correspondencia biunívoca entre el conocimiento especializado que poseen los profesores en relación con estos contenidos y su enseñanza de los mismos. Sin embargo, entendiendo, como citábamos al principio de este artículo, que el conocimiento especializado se desarrolla como producto de la acción profesional, incidir sobre el conocimiento especializado que se evidencia en la práctica de los profesores puede ser un modo de incidir en su práctica futura.

Referencias

Artigue, M., Assude, T., Grugeon, B. y Lenfant, A. (2001). Teaching and learning algebra: Approaching complexity through complementary perspectives. En H. Chick, K. Stacey y J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 21-32). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bardin, L. (1986). *Análisis de contenido*. Madrid, España: Ediciones Akal.

Bromme, R. y Tillema, H. (1995). Fusing experience and theory: The structure of professional knowledge. *Learning and Instruction, 5*, 261-267.

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de investigación y relaciones*. Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.

Carrillo, J., Montes, M. A., Contreras, L. C. y Climent, N. (2017). Les connaissances du professeur dans une perspective basée sur leur spécialisation: MTSK. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 22*, 185-205.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (95-124). Barcelona, España: ice-Horsori.

Charalambous, C. Y. (2009). Mathematical knowledge for teaching and providing explanations: An exploratory study. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y C. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conf. of the Int.*

Group for the Psychology of Mathematics Education (305-312). Thessaloniki, Greece: PME.

Charalambous, C. y Pitta-Pantazi, D. (2016). Perspectives on Priority Mathematics Education. Unpacking and understanding a complex relationship linking teacher knowledge, teaching, and learning. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (19-59). New York, NY: Routledge.

D'Amore, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno, 35*, 90-106.

Escudero-Ávila, D. I., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA, 10*(1), 53-77.

Fennema, E. y Franke, M. (1992). Teachers' knowledge and its impact. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (147-164). Reston, VA: NCTM.

Figueiredo, C., Contreras. L. C. y Blanco, L. (2009). A transparência e a variação dos exemplos utilizados na aprendizagem de conceitos matemáticos. *Revista ZETETIKÉ FE/UNICAMP, 17*(32), 29-60.

Figueiredo, C. y Contreras, L. C. (2013). A função quadrática: variação, transparencia e duas tipologías de ejemplos. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 3*, 45-68.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D. y Carrillo, J. (2013). A theoretical review of specialized content knowledge. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th Congress of the Eu- ropean Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3055-3064). Antalya, Turkía: ERME.

Kilpatrick, J. y Spangler, D. (2016). Educating future mathematics education professors. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 297-309). New York, NY: Routledge.

McCrory, R., Floden, R., Ferrini-Mundy, J., Reckase, M. D. y Senk, S. L. (2012). Knowledge of algebra for teaching: A framework of knowledge and practices. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(5), 584-615.

Ortega, P. (2002). *La enseñanza del álgebra lineal mediante sistemas informáticos de cálculo algebraico* (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid, España.

Ponte, J. P. y Chapman, O. (2016). Prospective mathematics teachers' learning and knowledge for teaching. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (275-296). New York, NY: Routledge.

Ramírez, O., Romero, C. F. y Oktaç, A. (2013). Coordinación de registros semióticos y las transformaciones lineales en el plano. En A. Ramírez e Y. Morales (Eds.), *I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe* (pp. 537-547). Santo Domingo, República Dominicana: ICEMACYC.

Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 255-281.

Schoenfeld, A. H. (2010). *How we think*. New York, NY: Routledge.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Stake, R. E. (2008). Qualitative Case Studies. En N. Denzin y Y. Lincoln (Eds.), *Strategies of Qualitative Inquiry* (pp. 119-149). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Vasco, D. (2015). *Conocimiento especializado del profesor de álgebra lineal. Un estudio de casos en el nivel universitario* (Tesis doctoral). Universidad de Huelva, España.

Vasco, D., Climent, N., Escudero-Ávila, D. y Flores-Medrano, E. (2015). The characterisation of the specialised knowledge of a university lecturer in linear algebra. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the CERME 9* (pp. 3283-3288). Prague, República Checa: ERME.

Vasco, D., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Montes, M. A. y Ribeiro, M. (2016). Conocimiento especializado de un profesor de álgebra lineal y espacios de trabajo matemático. *Bolema, 30*(54), 222-239.

Yin, R. (2003). *Case study research. Design and methods*. Londres, Reino Unido: Sage Publications.

Zaslavsky, O. (2010). The explanatory power of examples in mathematics. Challenges for teaching. En M. K. Stein y L. Kucan (Eds.), *Instructional explanations in the disciplines* (pp. 107-128). New York, NY: Springer.

Diana Vasco Mora
Universidad Técnica Estatal de Quevedo
Quevedo (Los Ríos, Ecuador)
dianav350@yahoo.com

Nuria Climent Rodríguez
Universidad de Huelva
Huelva (España)
climent@uhu.es

Recibido: 10 de octubre de 2017. Aceptado: 23 de enero de 2018
Handle: ***

ISSN: 1887-3987